METODY OBLICZENIOWE

Projekt nr 3.4

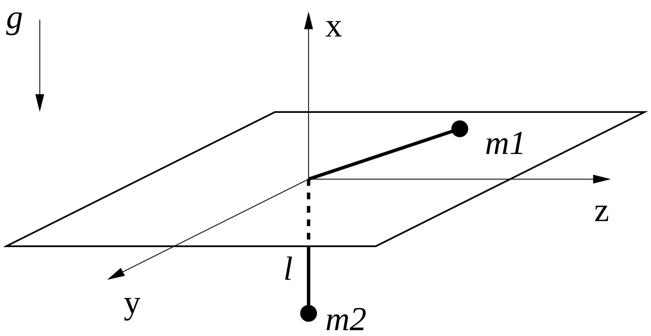
Dariusz Ostrowski, Wojciech Muła
2FD/L03

Zadanie

Nasze zadanie składało się z dwóch części:

1. Sformułowanie, przy użyciu metody Lagrange'a II rodzaju, równania różniczkowego dla podanego układu mechanicznego.
2. Obliczenia i wizualizacja zachowania układu dla zadanych parametrów.

Schemat układu przedstawia rysunek.



Układ składa się z dwóch punktów materialnych o masach m_1 i m_2 połączonych nieskrętną nicią o długości l, która została przeciągnięta przez otwór w płaszczyźnie. Na układ działa przyspieszenie grawitacyjne g (zwrot zaznaczony na rysunku). W układzie nie występuje tarcie.

Parametry układu:

- m_1, m_2 — masy punktów materialnych,
- l — długość sznura,
- g — przyspieszenie grawitacyjne

Założenia: punkt 1 porusza się na płaszczyźnie YZ, zaś punkt 2 porusza się wzdłuż osi X.

Wyprowadzenie równania

Współrzędne uogólnione

Do opisu punktu materialnego w przestrzeni R^3 potrzebne są trzy współrzędne; niech współrzędne x_1, y_1 i z_1 odnoszą się do punktu nr 1 (o masie m_1), zaś x_2, y_2 i z_2 do drugiego punktu (o masie m_2). Zatem liczba stopni swobody układu nieskrępowanego: $n = 6$.

W układzie występują trzy więzy:

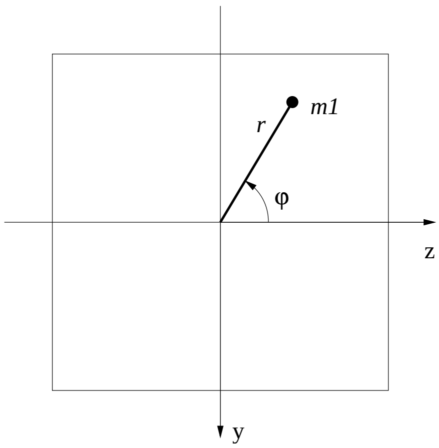
1. Punkt materialny nr 1 porusza się na płaszczyźnie YZ, stąd
$$x_1 = 0.$$
2. Punkt materialny nr 2 porusza się wzdłuż osi X, stąd
$$y_2 = z_2 = 0.$$
3. Ruch punktów materialnych 1 i 2 nie jest niezależny. Uwzględniając wyżej wymienione więzy oraz długość sznurka l możemy stwierdzić, że pomiędzy współrzędnymi y_1 i z_1, a współrzędną x_2 występuje zależność:
$$y_1^2 + z_1^2 = (l + x_2)^2.$$

Łączna liczba więzów holonmicznych występujących w układzie wynosi: $h = 4$ (punkt 1. – jedno równanie, punkt 2. – dwa równania, punkt 3. – jedno równanie). Stąd liczba *stopni swobody* układu jest równa:

$$s = n - h = 6 - 4 = 2.$$

Jako współrzędne uogólnione przyjmiemy odległość r masy m_1 od otworu, przez który przeciągnięty jest sznur, oraz kąt (φ) obrotu sznura względem dodatniej półosi Z, czyli:

$$q = (q_1, q_2) = (r, \varphi).$$



Wykorzystując wybrane współrzędne uogólnione oraz równania więzów przygotujemy *wzory transformacyjne*:

$$\begin{array}{ll} z_1 = r\cos(\varphi), & \dot{z}_1 = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin(\varphi), \\ y_1 = r\sin(\varphi), & \dot{y}_1 = \dot{r}\sin\varphi - r\dot{\varphi}\cos(\varphi), \\ x_2 = r - l, & \dot{x}_2 = \dot{r} \end{array}$$

W ten sposób wszystkie niezerowe współrzędne i prędkości opisu pierwotnego są wyrażone przez współrzędne uogólnione i ich pochodne po czasie.

Równanie Lagrange'a

Energia kinetyczna układu wyrażona we współrzędnych pierwotnych wynosi:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2).$$

Energia potencjalna punkt materialnego o masie m_2 jest wprost proporcjonalna do odległości tej masy od płaszczyzny (x_2); zatem

$$U = m_2 \cdot g \cdot x_2.$$

Po wykorzystaniu wzorów transformacyjnych, powyższe funkcje energii kinetycznej i potencjalnej przyjmują postać:

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) + m_2\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 - g(r-l)\right),$$

$$U = m_2 \cdot g \cdot (r-l).$$

Funkcja Lagrange'a układu wyrażona we współrzędnych uogólnionych przyjmuje postać:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) + m_2\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 - g\,(r-l)\right).$$

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = P_{q_i} - D_{q_i}\dot{q}_i$$

przy czym $i \in \{1,2\}$ – $q_1 = r$ oraz $q_2 = \varphi$.

Obliczamy pochodne cząstkowe występujące w równaniach Lagrange'a:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_1\dot{r} = (m_1+m_2)\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r\varphi^2 - m_2 g,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 r^2\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Równania ruchu

Ponieważ na układ nie działają siły zewnętrzne oraz nie występują tłumienia ruchu, to równania ruchu przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\,\dot{r}\right] - m_1 r\dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0,\\ \frac{d}{dt}\left[m_1 r^2\dot{\varphi}\right] = 0.\end{aligned}$$

Obliczając pochodne ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\,\ddot{r} - m_1 r\dot{\varphi} + m_2 g = 0,\\ m_1\left(r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\right) = 0.\end{aligned}$$

Realizacja w programie Matlab 6.0

Wbudowane w program `Matlab` funkcje rozwiązujące układy równań różniczkowych potrafią operować na równaniach postaci $y' = f(x,y)$. W naszym przypadku wektor $y = [V_r, \omega_\varphi, r, \varphi]$, zaś $y' = [V_r', \omega_\varphi', r', \varphi']$. Należało tak przeformułować równania ruchu, aby mogły zostać obliczone przez program `Matlab`. Po prostych przekształceniach otrzymaliśmy:

$$\begin{aligned}V_r' &= \frac{m_1 r\omega_\varphi^2 - m_2 g}{m_1+m_2}\\ \omega_\varphi' &= \frac{-2rV_r\omega_\varphi m_1}{m_1 r^2} = -\frac{2V_r\omega_\varphi}{r}\\ r' &= V_r\\ \omega' &= \omega_\varphi\end{aligned}$$

Wspomniane funkcje, używane przez nas, to `ode23` oraz `ode45`, które rozwiązują układy równań przy użyciu metody Rungego-Kutty; funkcja `ode45` jest bardziej dokładna (i jednocześnie wolniejsza), niż `ode23`. Równania są na tyle proste, że nie musieliśmy badać zachowania modelu dla innych funkcji serii `ode`.

Użycie funkcji `ode` jest następujące:

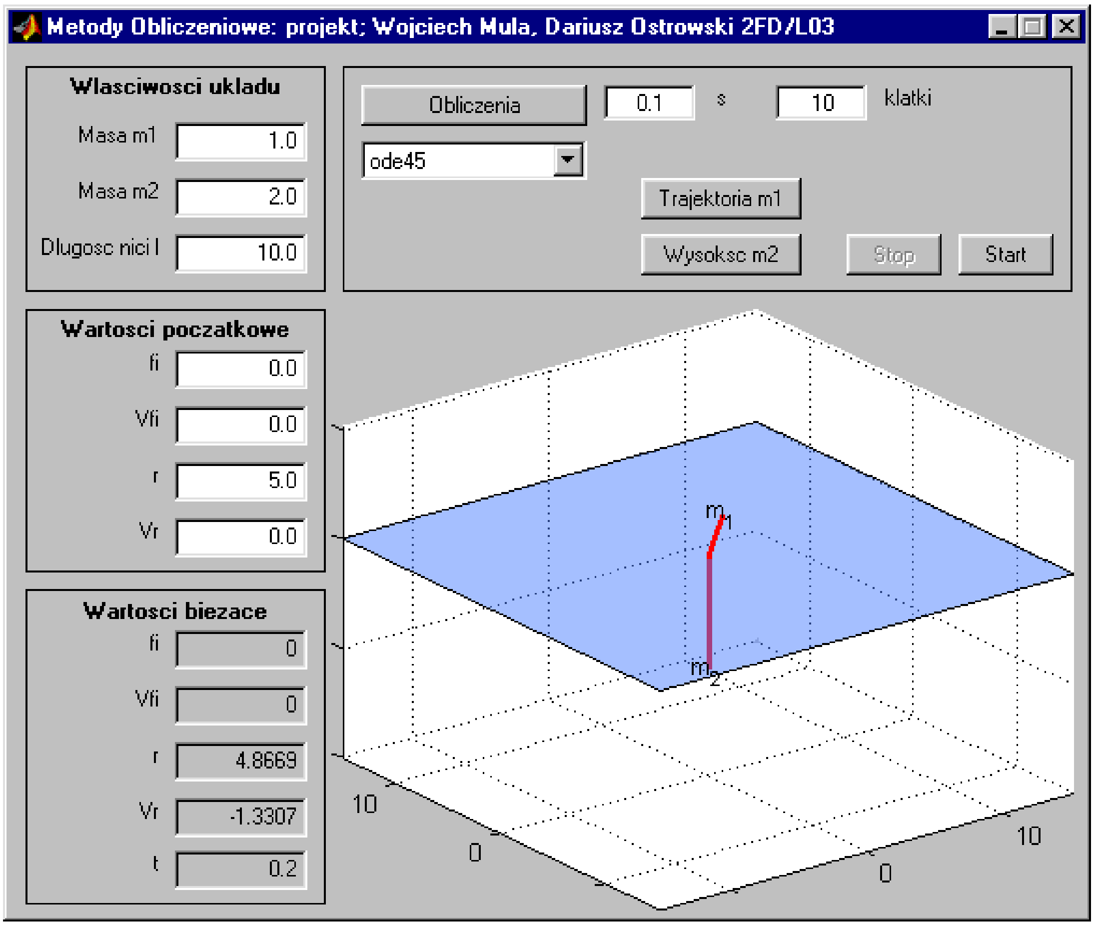
```
[T,Y] = ode('funkcja', tspan, y0)
```

gdzie *funkcja* oblicza prawą stronę wyżej wymienionego układu (wektor y), *tspan* określa przedział czasu lub konkretne wartości t dla których wyznaczany jest wektor y'. Parametr *y0* to wektor wartości początkowych.

Funkcja musi być zapisana w M-pliku; poniżej używana przez nas funkcja

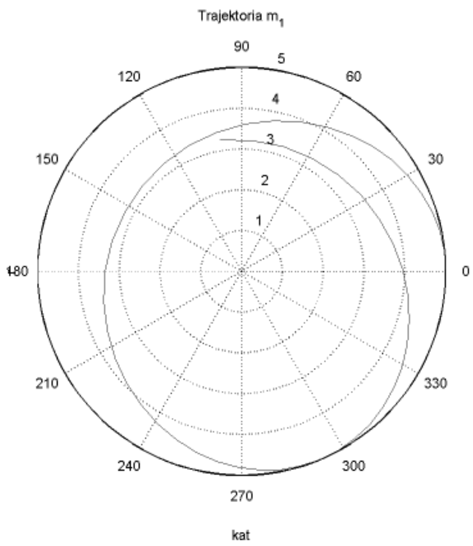
```
function [Dx]=derivative(t, x)
global m1 m2 g l % parametry układu

Vr  = x(1)       % wartości z kroku poprzedniego
Vfi = x(2)       % Vfi -- prędkość kątowa
r   = x(3)

% sprawdzenie skrajnych przypadków
if r < 1e-3
r  = 1e-3
Vr = 0
end

if r > l
r  = l
Vr = 0
end

% wyznaczenie wektora
a = (m1*r*Vfi*Vfi - m2*g)/(m1+m2)
b = (-2*Vr*Vfi)/r
c = Vr
d = Vfi
Dx = [a;  b;   c;  d]
%     Vr' Vfi' r'  fi'
```

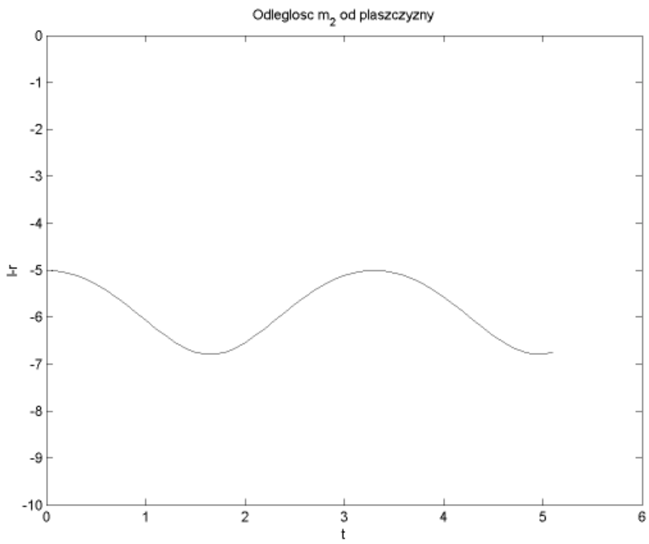
Interfejs graficzny został zaprojektowany we wbudowanym w `Matlab` programie `GUIDE`. Użytkownik ma możliwość wprowadzenia wszystkich parametrów układu (za wyjątkiem przyspieszenia grawitacyjnego, które zostało ustalone na 9,98 m/s), zadać wartości początkowe oraz wybrać funkcję wykorzystywaną do obliczeń, określić krok czasowy i ilość kroków. Po obliczeniach można oglądnąć animację ruchu i obserwować na bieżąco wszystkie parametry lub też zobaczyć trajektorię ruchu masy m_1 albo wykres $r(t)$.


Metody Obliczeniowe: projekt; Wojciech Mula, Dariusz Ostrowski 2FD/L03
Wlasciwosci ukladu
Masa m1
1.0
Masa m2
2.0
Dlugosc nici l
10.0
Obliczenia
0.1
s
10
klatki
ode45
Trajektoria m1
Wysoksc m2
Stop
Start
Wartosci poczatkowe
fi
0.0
Vfi
0.0
r
5.0
Vr
0.0
Wartosci biezace
fi
0
Vfi
0
r
4.8669
Vr
-1.3307
t
0.2
m1
m2
10
0
10
0

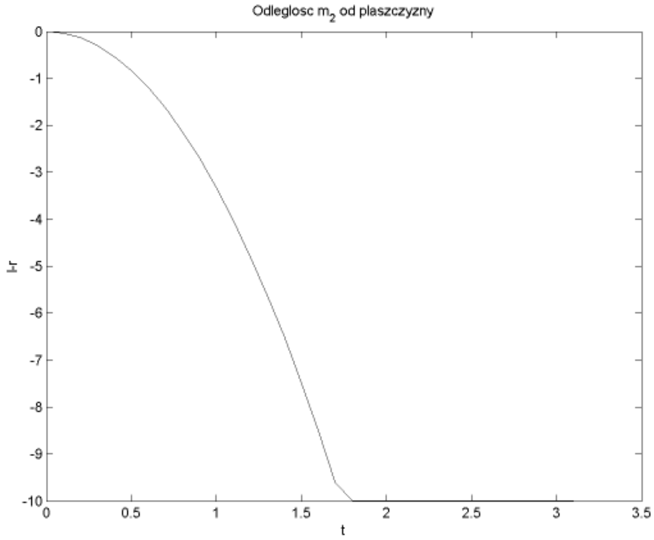
Przykładowe wyniki

Oscylacje

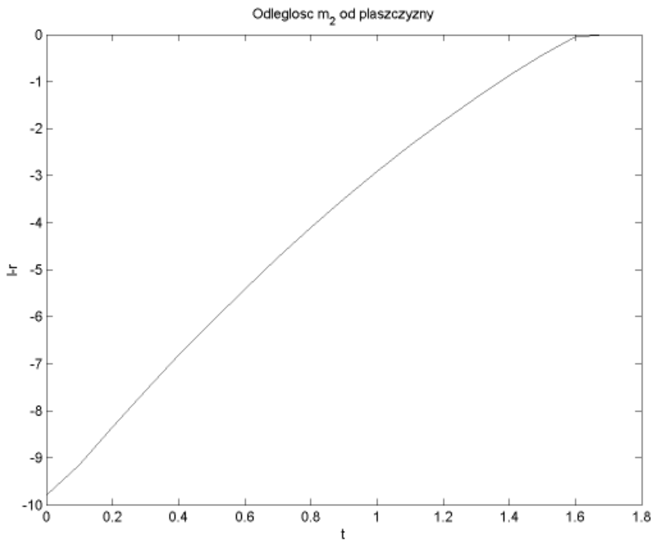




Ruch swobodny



Duża siła odśrodkowa



Ruch po okręgu ($r < l$)

Taki efekt można uzyskać dla następujących danych: $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $l = 10$, $r = 5$ $\omega_\varphi = 10$ (`Vfi`). Ponieważ rysunki są w tym przypadku nieciekawe (m_1 porusza się po okręgu, $r = const$), więc nie zostaną zamieszczone.

Wnioski

- Parametry równań ruchu nie zależą od czasu t ani od kąta φ. Na zachowanie układu mają wpływ trzy parametry.
- Równania ruchu mają sens fizyczny tylko gdy parametr $r \in (0, l)$. Gdy r jest bliskie 0 (bliskie, ze względu na błędy obliczeń numerycznych), układ się zatrzymuje. Podobnie, gdy r staje się dostatecznie bliskie l, oznacza to, że siła odśrodkowa jest na tyle duża, że od tej chwili masa m_1 będzie poruszać się po okręgu o promieniu l. Obydwa skrajne przypadki zostały uwzględnione w M-funkcji.
- W zachowaniu modelu układu można wyróżnić cztery stany, w zależności od relacji pomiędzy siłą grawitacji działającą, a siłą odśrodkową spowodowaną ruchem obrotowym.
  - Siły równoważą się i ruch masy punktowej m_1 odbywa się po okręgu (jeden z rysunków wyżej).
  - Przeważa wyraźnie siła grawitacji i ww masa systematycznie zbliża się do otworu.
  - Przeważa wyraźnie siła odśrodkowa i ww masa oddala się od otworu aż na długość sznura.
  - W układzie występuję rezonans – $r(t)$ jest funkcją sinusoidalną.