Politechnika Rzeszowska
Katedra Informatyki i Automatyki

Teoretyczne podstawy informatyki

Projekt nr 3

Wojciech Muła, 2FD/P03

$\LaTeX 2_\varepsilon$

Dana jest gramatyka bezkontekstowa

$$G = \langle \{S, X, Y, x, y\}, \{x, y\}, P, S \rangle$$

Zbiór reguł produkcji P (zestaw nr 179) przedstawia się następująco:

$S \to SYX|Y|X$
$Y \to YY|yXx$
$X \to XX|yx|x$

Zadanie: używając algorytmu Cooke'a-Youngera-Kasamiego, potwierdzić, że dwa dowolne pięcioliterowe słowa istotnie należą do języka generowanego przez GBK G. Algorytm wymaga, by gramatyka była podana w postaci normalnej Chomsky'ego:

$S \to HX|EE|GG|FA|DD|CC|AA|BA|x$
$Y \to EE|GG|FA$
$X \to DD|CC|AA|BA|x$
$A \to x$
$B \to y$
$C \to BA$
$D \to XX$
$E \to YY$
$F \to BX$
$G \to FA$
$H \to SY$

Wybrane słowa to *xxxyx* oraz *xxyxx*.

Wykonanie algorytmu dla słowa *xxxyx*

Pierwsza część algorytmu

- $V_{11} = \{A|A \to x_1 = x\} = \{A, S, X\}$
- $V_{21} = \{A|A \to x_2 = x\} = \{A, S, X\}$
- $V_{31} = \{A|A \to x_3 = x\} = \{A, S, X\}$
- $V_{41} = \{A|A \to x_4 = y\} = \{B\}$
- $V_{51} = \{A|A \to x_5 = x\} = \{A, S, X\}$

Druga część algorytmu

- $j = 2$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k = 1$
  1. $j = 2$, $i = 1$, $k = 1$

$$V_{12} = \{A \to BC, \quad B \in V_{11}, C \in V_{21}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \{A, S, X\}$

- $S, X \to AA$
- $(-) \to AS$
- $(-) \to AX$
- $(-) \to SA$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to XA$
- $(-) \to XS$
- $D \to XX$

$$V_{12} = \{X, S, D\}$$

2. $j = 2, i = 2, k = 1$

$$V_{22} = \{A \to BC, \quad B \in V_{21}, C \in V_{31}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \{A, S, X\}$

- $S, X \to AA$
- $(-) \to AS$
- $(-) \to AX$
- $(-) \to SA$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to XA$
- $(-) \to XS$
- $D \to XX$

$$V_{22} = \{X, S, D\}$$

3. $j = 2, i = 3, k = 1$

$$V_{32} = \{A \to BC, \quad B \in V_{31}, C \in V_{41}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \{B\}$

- $(-) \to AB$
- $(-) \to SB$
- $(-) \to XB$

$$V_{32} = \emptyset$$

4. $j = 2, i = 4, k = 1$

$$V_{42} = \{A \to BC, \quad B \in V_{41}, C \in V_{51}\}$$

BC = $\{B\} \times \{A, S, X\}$

- $C, S, X \to BA$

- $(-) \to BS$
- $F \to BX$

$$V_{42} = \{X, C, S, F\}$$

- $j = 3$, $i = 1,2,3$, $k = 1,2$
  1. $j = 3$, $i = 1$, $k = 1,2$

$$V_{13} = \{A \to BC, \quad B \in V_{11}, C \in V_{22}; \\ B \in V_{12}, C \in V_{31}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \{X, S, D\} + \{X, S, D\} \times \{A, S, X\}$

- $(-) \to AX$
- $(-) \to AS$
- $(-) \to AD$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SD$
- $D \to XX$
- $(-) \to XS$
- $(-) \to XD$
- $(-) \to XA$
- $(-) \to XS$
- $D \to XX$
- $(-) \to SA$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to DA$
- $(-) \to DS$
- $(-) \to DX$

$$V_{13} = \{D\}$$

  2. $j = 3$, $i = 2$, $k = 1,2$

$$V_{23} = \{A \to BC, \quad B \in V_{21}, C \in V_{32}; \\ B \in V_{22}, C \in V_{41}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \emptyset + \{X, S, D\} \times \{B\}$

- $(-) \to XB$
- $(-) \to SB$
- $(-) \to DB$

$$V_{23} = \emptyset$$

3. $j = 3, i = 3, k = 1,2$

$$V_{33} = \{A \to BC, \quad \begin{aligned} &B \in V_{31}, C \in V_{42}; \\ &B \in V_{32}, C \in V_{51}\} \end{aligned}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \{X,C,S,F\} + \emptyset \times \{A,S,X\}$

- $(-) \to AX$
- $(-) \to AC$
- $(-) \to AS$
- $(-) \to AF$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to SC$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SF$
- $D \to XX$
- $(-) \to XC$
- $(-) \to XS$
- $(-) \to XF$

$$V_{33} = \{D\}$$

- $j = 4, i = 1,2, k = 1,2,3$

1. $j = 4, i = 1, k = 1,2,3$

$$V_{14} = \{A \to BC, \quad \begin{aligned} &B \in V_{11}, C \in V_{23}; \\ &B \in V_{12}, C \in V_{32}; \\ &B \in V_{13}, C \in V_{41}\} \end{aligned}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \emptyset + \{X,S,D\} \times \emptyset + \{D\} \times \{B\}$

- $(-) \to DB$

$$V_{14} = \emptyset$$

2. $j = 4, i = 2, k = 1,2,3$

$$V_{24} = \{A \to BC, \quad \begin{aligned} &B \in V_{21}, C \in V_{33}; \\ &B \in V_{22}, C \in V_{42}; \\ &B \in V_{23}, C \in V_{51}\} \end{aligned}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \{D\} + \{X,S,D\} \times \{X,C,S,F\} + \emptyset \times \{A,S,X\}$

- $(-) \to AD$
- $(-) \to SD$
- $(-) \to XD$

- $D \to XX$
- $(-) \to XC$
- $(-) \to XS$
- $(-) \to XF$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to SC$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SF$
- $(-) \to DX$
- $(-) \to DC$
- $(-) \to DS$
- $(-) \to DF$

$$V_{24} = \{D\}$$

- $j = 5$, $i = 1$, $k = 1,2,3,4$

  1. $j = 5$, $i = 1$, $k = 1,2,3,4$

$$\begin{aligned} V_{15} = \{A \to BC, \quad & B \in V_{11}, C \in V_{24}; \\ & B \in V_{12}, C \in V_{33}; \\ & B \in V_{13}, C \in V_{42}; \\ & B \in V_{14}, C \in V_{51}\} \end{aligned}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \{D\} + \{X,S,D\} \times \{D\} + \{D\} \times \{X,C,S,F\} + \emptyset \times \{A,S,X\}$

- $(-) \to AD$
- $(-) \to SD$
- $(-) \to XD$
- $(-) \to XD$
- $(-) \to SD$
- $S,X \to DD$
- $(-) \to DX$
- $(-) \to DC$
- $(-) \to DS$
- $(-) \to DF$

$$V_{15} = \{X,S\}$$

A,S,X V_{11}	A,S,X V_{21}	A,S,X V_{31}	B V_{41}	A,S,X V_{51}
X,S,D V_{12}	X,S,D V_{22}	— V_{32}	X,C,S,F V_{42}	
D V_{13}	— V_{23}	D V_{33}		
— V_{14}	D V_{24}			
X,S V_{15}				

Ponieważ $S \in V_{15}$, zatem słowo $xxxyx$ należy do języka $L(G)$.

Wykonanie algorytmu dla słowa *xxyxx*

Pierwsza część algorytmu

- $V_{11} = \{A|A \to x_1 = x\} = \{A,S,X\}$
- $V_{21} = \{A|A \to x_2 = x\} = \{A,S,X\}$
- $V_{31} = \{A|A \to x_3 = y\} = \{B\}$
- $V_{41} = \{A|A \to x_4 = x\} = \{A,S,X\}$
- $V_{51} = \{A|A \to x_5 = x\} = \{A,S,X\}$

Druga część algorytmu

- $j = 2$, $i = 1,2,3,4$, $k = 1$

  1. $j = 2$, $i = 1$, $k = 1$

     $$V_{12} = \{A \to BC, \quad B \in V_{11}, C \in V_{21}\}$$

     BC = $\{A,S,X\} \times \{A,S,X\}$

     - $S,X \to AA$
     - $(-) \to AS$
     - $(-) \to AX$
     - $(-) \to SA$
     - $(-) \to SS$
     - $(-) \to SX$
     - $(-) \to XA$
     - $(-) \to XS$
     - $D \to XX$

     $$V_{12} = \{X,S,D\}$$

2. $j = 2, i = 2, k = 1$

$$V_{22} = \{A \to BC, \quad B \in V_{21}, C \in V_{31}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \{B\}$

- $(-) \to AB$
- $(-) \to SB$
- $(-) \to XB$

$$V_{22} = \emptyset$$

3. $j = 2, i = 3, k = 1$

$$V_{32} = \{A \to BC, \quad B \in V_{31}, C \in V_{41}\}$$

BC = $\{B\} \times \{A, S, X\}$

- $C, S, X \to BA$
- $(-) \to BS$
- $F \to BX$

$$V_{32} = \{X, C, S, F\}$$

4. $j = 2, i = 4, k = 1$

$$V_{42} = \{A \to BC, \quad B \in V_{41}, C \in V_{51}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \{A, S, X\}$

- $S, X \to AA$
- $(-) \to AS$
- $(-) \to AX$
- $(-) \to SA$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to XA$
- $(-) \to XS$
- $D \to XX$

$$V_{42} = \{X, S, D\}$$

- $j = 3, i = 1, 2, 3, k = 1, 2$

1. $j = 3, i = 1, k = 1, 2$

$$V_{13} = \{A \to BC, \quad B \in V_{11}, C \in V_{22}; \\ B \in V_{12}, C \in V_{31}\}$$

BC = $\{A, S, X\} \times \emptyset + \{X, S, D\} \times \{B\}$

- $(-) \to XB$

- $(-) \to SB$
- $(-) \to DB$

$$V_{13} = \emptyset$$

2. $j = 3$, $i = 2$, $k = 1,2$

$$V_{23} = \{A \to BC, \quad B \in V_{21}, C \in V_{32}; \\ B \in V_{22}, C \in V_{41}\}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \{X,C,S,F\} + \emptyset \times \{A,S,X\}$

- $(-) \to AX$
- $(-) \to AC$
- $(-) \to AS$
- $(-) \to AF$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to SC$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SF$
- $D \to XX$
- $(-) \to XC$
- $(-) \to XS$
- $(-) \to XF$

$$V_{23} = \{D\}$$

3. $j = 3$, $i = 3$, $k = 1,2$

$$V_{33} = \{A \to BC, \quad B \in V_{31}, C \in V_{42}; \\ B \in V_{32}, C \in V_{51}\}$$

BC = $\{B\} \times \{X,S,D\} + \{X,C,S,F\} \times \{A,S,X\}$

- $F \to BX$
- $(-) \to BS$
- $(-) \to BD$
- $(-) \to XA$
- $(-) \to XS$
- $D \to XX$
- $(-) \to CA$
- $(-) \to CS$
- $(-) \to CX$
- $(-) \to SA$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SX$

- $G,S,Y \to FA$
- $(-) \to FS$
- $(-) \to FX$

$$V_{33} = \{Y,S,D,G,F\}$$

- $j = 4$, $i = 1,2$, $k = 1,2,3$

1. $j = 4$, $i = 1$, $k = 1,2,3$

$$\begin{aligned} V_{14} = \{A \to BC, \quad & B \in V_{11}, C \in V_{23}; \\ & B \in V_{12}, C \in V_{32}; \\ & B \in V_{13}, C \in V_{41}\} \end{aligned}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \{D\} + \{X,S,D\} \times \{X,C,S,F\} + \emptyset \times \{A,S,X\}$

- $(-) \to AD$
- $(-) \to SD$
- $(-) \to XD$
- $D \to XX$
- $(-) \to XC$
- $(-) \to XS$
- $(-) \to XF$
- $(-) \to SX$
- $(-) \to SC$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SF$
- $(-) \to DX$
- $(-) \to DC$
- $(-) \to DS$
- $(-) \to DF$

$$V_{14} = \{D\}$$

2. $j = 4$, $i = 2$, $k = 1,2,3$

$$\begin{aligned} V_{24} = \{A \to BC, \quad & B \in V_{21}, C \in V_{33}; \\ & B \in V_{22}, C \in V_{42}; \\ & B \in V_{23}, C \in V_{51}\} \end{aligned}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \{Y,S,D,G,F\} + \emptyset \times \{X,S,D\} + \{D\} \times \{A,S,X\}$

- $(-) \to AY$
- $(-) \to AS$
- $(-) \to AD$

- $(-) \to AG$
- $(-) \to AF$
- $H \to SY$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SD$
- $(-) \to SG$
- $(-) \to SF$
- $(-) \to XY$
- $(-) \to XS$
- $(-) \to XD$
- $(-) \to XG$
- $(-) \to XF$
- $(-) \to DA$
- $(-) \to DS$
- $(-) \to DX$

$$V_{24} = \{H\}$$

- $j = 5$, $i = 1$, $k = 1,2,3,4$

  1. $j = 5$, $i = 1$, $k = 1,2,3,4$

$$\begin{aligned} V_{15} = \{A \to BC, \quad & B \in V_{11}, C \in V_{24}; \\ & B \in V_{12}, C \in V_{33}; \\ & B \in V_{13}, C \in V_{42}; \\ & B \in V_{14}, C \in V_{51}\} \end{aligned}$$

BC = $\{A,S,X\} \times \{H\} + \{X,S,D\} \times \{Y,S,D,G,F\} + \emptyset \times \{X,S,D\} + \{D\} \times \{A,S,X\}$

- $(-) \to AH$
- $(-) \to SH$
- $(-) \to XH$
- $(-) \to XY$
- $(-) \to XS$
- $(-) \to XD$
- $(-) \to XG$
- $(-) \to XF$
- $H \to SY$
- $(-) \to SS$
- $(-) \to SD$
- $(-) \to SG$
- $(-) \to SF$

- $(-) \to DY$
- $(-) \to DS$
- $S, X \to DD$
- $(-) \to DG$
- $(-) \to DF$
- $(-) \to DA$
- $(-) \to DS$
- $(-) \to DX$

$$V_{15} = \{H, S, X\}$$

A,S,X V_{11}	A,S,X V_{21}	B V_{31}	A,S,X V_{41}	A,S,X V_{51}
X,S,D V_{12}	— V_{22}	X,C,S,F V_{32}	X,S,D V_{42}	
— V_{13}	D V_{23}	Y,S,D,G,F V_{33}		
D V_{14}	H V_{24}			
H,S,X V_{15}				

Ponieważ $S \in V_{15}$, zatem słowo *xxyxx* należy do języka $L(G)$.